

ALGEBRA LINIOWA I GEOMETRIA

LISTA ZADAŃ 2

Grupa permutacji

$$S_n := (\{\varphi : [n] \xrightarrow{\text{bijekcja}} [n]\}, \circ)$$

jest jedną z najważniejszych grup ponieważ każdą skończoną grupę można w nią zanurzyć dla dostatecznie dużego n . Powyższa własność wynika z Twierdzenia Cayleya.

- (1) Korzystając z reguły mnożenia oblicz jakiego rzędu jest grupa S_n .
- (2) Zapisz następujące grupy jako podgrupy grupy permutacji: C_5 , D_4 , Grupa symetrii czworościanu Platona, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (3) Zastanów się dla jakiego n możemy traktować ruchy na 2- oraz 3-kostce kostce Rubika jako podgrupę S_n . Mówiąc 3-kostka Rubika mam na myśli jej standardową wersję. Natomiast przez 2-kostkę Rubika mam na myśli kostkę, której każda krawędź jest podzielona na dwie części

Pierścień wielomianów to struktura algebraiczna, która składa się ze zbior:

$$R[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i : n \in \mathbb{N}_0, a_i \in R \right\},$$

gdzie x jest zmienną oraz zdefiniowanym na nim dodawaniem:

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) + \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right) := \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) x^i$$

i mnożeniem:

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right) := \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k,$$

gdzie $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Mówimy, że dzielenie z resztą $f(x)/g(x)$ w $R[x]$ jest możliwe jeśli istnieją wielomiany $q(x)$ i $r(x)$ w $R[x]$ takie, że

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

oraz $\deg r < \deg g$. Warto zapamiętać, że w pierścieniach wielomianów o współczynnikach z ciała dzielenie wielomianów jest możliwe dla par wielomianów $f(x), g(x)$ o ile $g(x) \neq 0 \in \mathbb{K}[x]$.

- (4) Uprość poniższe wielomiany:

$$\begin{aligned} \text{'+' i '-' : } & (x-1) + (x^2 + 7x - 8) =; (x^3 - 1) + (x^4 - x^3 + 2x^2 + 2) =; (x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 2) - (x^5 - x^3 - x) = \\ \text{'x' : } & (x-1)(x-3) =; (x+5)(x-4)(x-2)(x+1) = \\ \text{'+' i 'x' : } & (x-1)(x+7)(x-6) + (x+2)(x-1)^2 = \end{aligned}$$

- (5) Używając schematu Hornera (link do matfiz24.pl) wykonaj następujące dzielenia z resztą:
- $(x^2 - 6x + 9) : (x - 2)$
 - $(x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 12x) : (x + 2)$
 - $(x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 12x) : (x + 4)$
- (6) Podziel z resztą jeśli to możliwe, wielomian $f(x)$ przez $g(x)$ w pierścieniach wielomianów o współczynnikach całkowitych oraz zespolonych.
- $f(x) = x^3 - x, g(x) = x + 2$
 - $f(x) = x^3 - x, g(x) = 2x^2 + 1$
 - $f(x) = 2x^3 - x, g(x) = x^4 + x^2 + 1$

Ważną rolę w rodzinie pierścieni odgrywają pierścienie euklidesa. Takie pierścienie charakteryzują się tym, że elementom możemy przypisać taką funkcję porządkującą, że podzielenie z resztą elementu o większej lub równej wadze jest możliwe oraz daje resztę której waga jest mniejsza od wagi dzielnika. Pierścienie te nazywamy euklidesowymi ponieważ możemy w nich stosować algorytm euklidesa w celu znalezienia największego wspólnego dzielnika (NWD).

- (7) Oblicz za pomocą algorytmu euklidesa największy wspólny dzielnik par będących elementami z pierścienia w apostrofach
- ' $\mathbb{Z}$ ' : 12 oraz 44, 21 oraz 34, 375 oraz 60, 1023 oraz 62
- ' $\mathbb{Q}[x]$ ' : $x^3 - 1$ oraz $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $4x^4 + 1$ oraz $2x^2 + 1$
- (8) Oblicz za pomocą faktoryzacji na czynniki pierwsze największy wspólny dzielnik następujących par liczb: 105 oraz 77, 1023 oraz 1922.
- (9) Sprawdź używając schematu Hornera czy wypisane pary wielomianów są względnie pierwsze w $\mathbb{C}[x]$: $x^3 - 1$ oraz $x^2 + x + 1$, $4x^4 + 1$ oraz $x^2 + 1$.