

ALGEBRA LINIOWA I GEOMETRIA

Rozwiązanie zadania z odwracaniem macierzy. Odwróć macierz $A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{F}_7)$ Pomocniczo

umieszczę tabelę odwrotności modulo 7: $\begin{array}{c|ccc|ccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 :_7 x & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & - \end{array}$ Przejdźmy do obliczeń zgodnie z rozpoczętymi błąd polegał na błędnej poprawie, po zmianie działania została zmieniona tylko część wiersza. Zaczniemy od początku

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$W_2 - = 2W_1$, ponieważ $3 - 2 \cdot 5 = -7 \equiv 0 \pmod{7}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$W_3 - = 3W_1$, ponieważ $1 - 3 \cdot 5 = -14 \equiv 0 \pmod{7}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$W_1 := W_5/5 = 3W_5$ oraz $W_2 := W_2/5 = 3W_2$ Redukujemy pierwsze niezerowe współczynniki do 1 aby ułatwić dobór działań na wierszach

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$W_3 - = 3W_2$, ponieważ $3 - 3 \cdot 1 = 0 \equiv 0 \pmod{7}$ przy tej operacji zrobiliśmy błąd.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right]$$

$W_3 := W_3/6 = 6W_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

$W_1 - = 2W_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

$W_1 - = 3W_3$ oraz $W_2 - = 3W_3$, gdzie $3W_3 = [0 \ 0 \ 3 \mid 4 \ 6 \ 4]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

UWAGA Gdyby A była macierzą w $M_{3,3}(\mathbb{Q})$ to odpowiedzią byłoby

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{22} & \frac{2}{11} & \frac{3}{22} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Jako ćwiczenie przed kolokwium możecie wykonać redukcję tej macierzy w arytmetyce modulo 7.